***ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ***

***ΠΡΟΣΩΠΙΚΑ ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΚΑΤΩΤΡΙΩΤΗ ΚΩΣΤΑ***

***Ι . ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΤΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ***

***ΑΣΚΗΣΗ 1***

*Έστω οι παρατηρήσεις δυο δειγμάτων αντίστοιχα των μεταβλητών χ , ψ Δίνεται ότι η μέση τιμή των και ισχύει*

 *, t .*

*α) Να βρείτε την δειγματική μέση τιμή και τυπική απόκλιση της ψ συναρτήσει του t και .*

*β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η δειγματική τυπική απόκλιση της χ , ώστε το δείγμα παρατηρήσεων της ψ να είναι ομοιογενές .*

*γ) Αν = 2 , τότε*

 *(ι) να βρείτε την και , καθώς και την σχετική διασπορά των .*

 *(ιι) ποιό από τα παραπάνω δείγματα έχει την μικρότερη μεταβλητότητα .*

 *(ιιι) αν το δείγμα των ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή , ποια η*

 *πιθανότητα , μια στην τύχη παρατήρηση από το δείγμα της ψ , να ανήκει στο διά-*

 *στημα ( 16 , 22) .*

***ΛΥΣΗ*** *: α) Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου θα είναι*

 *και .*

*β) Για να παρουσιάζει το δείγμα των τιμών του ψ ομοιογένεια πρέπει ο CV*

*Είναι CV = = g(t) με g(t) = , t , για την οποία Για t>0 είναι (t) < 0 και για t είναι . Άρα στο t =0 η g παρουσιάζει μέγιστο το g(0)= 1/20, κατά συνέπεια g(t) =1/20 για κάθε t . Τότε για κάθε t , αφού θα ισχύει . Αν , τότε και μόνο τότε το , επομένως η ζητούμενη μέγιστη τιμή του =2 (για) t =0 .*

*γ) ι) Για ( άρα t=0 ) , από το α) ερώτημα παίρνουμε = 20 και και .*

*ii) Επειδή οι μέσες τιμές των δειγμάτων είναι 10 , 20 , διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους και οι τυπικές αποκλίσεις τους είναι ίσες με 2 , είναι λάθος το συμπέρασμα ότι τα δυο δείγματα έχουν την ίδια μεταβλητότητα . Το σωστό συμπέρασμα θα το έχουμε συγκρίνοντας τους συντελεστές μεταβλητότητας C . Επειδή , προκύπτει ότι την μικρότερη μεταβλητότητα εμφανίζει το δείγμα τιμών του ψ .*

*δ) Αφού είναι και , και οι δειγματικές τιμές της ψ ακολουθούν την κανονική κατανομή τότε το διάστημα ( 16, 22) αντιστοιχεί στο ( , στο οποίο εμφανίζεται το . Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0,815.*

***ΑΣΚΗΣΗ 3***

*Δίνεται η συνάρτηση f με f(χ) = με t > 0 παράμετρος .*

*α) Να δείξτε ότι = tlnt - t .*

*β) Ορίζουμε την συνάρτηση g με g (t) = - + , t > 0 .*

*(i) Βρείτε τo σημείο της γραφικής παράστασης της g στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης είναι μέγιστη .*

*(ιι) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της (1 , g(1)).*

*(iii) Αν ( είναι σημεία της (ε) με μέση τιμή και τυπική απόκλιση των να είναι , αντίστοιχα , τότε να βρείτε 1) την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των .*

*2) την σχετική διασπορά των και να εξετάστε αν το δείγμα τους είναι ομοιογενές .*

*3) Βρείτε την ελάχιστη θετική σταθερά c που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε παρατήρηση , ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές .*

***ΛΥΣΗ :****α) Είναι . Τότε f(x) = xlnt- t , κατά συνέπεια*

*β) (i) Από (α) είναι g(t) = - tlnt + t + με t >0 , η οποία είναι παραγωγίσιμη για κάθε t>0 με (t)= - lnt- 1+ 1 - = - lnt - και (t) = . Για t >0 είναι (t) και (t)<0 t > . Άρα η παρουσιάζει μέγιστο στο t = . Τότε το ζητούμενο σημείο είναι το ( , g( )) =( , .*

 *(ii) Η κλίση της εφαπτομένης είναι η λ = (1)= - ln1-1 = - 1 με εξίσωση ψ = -χ + β . Επειδή το σημείο (1, g(1))= ( 1 , 2) ανήκει στην , θα ισχύει 2= - 1+ β . Άρα η εξίσωση της (ε) είναι η ψ = - χ + 3 .*

*(iii) (1) Είναι - 9 + 3 = - 6 και*

 *(2) Η σχετική διασπορά δίνεται από τον CV = > 0,1 , άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .*

 *(3) Έστω οι παρατηρήσεις του νέου δείγματος . Τότε και και . Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει ή c – 6 10 ή c 16 . Άρα επομένως η ελάχιστη θετική σταθερά είναι η c = 16 .*

***ΑΣΚΗΣΗ 4***

 *Καθένας από τους μαθητές ενός σχολείου συμμετέχει σε ένα τουλάχιστον από τα μοναδικά εκπαιδευτικά προγράμματα α και β που διοργανώνει το σχολείο τους . Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α , Β , με Α : ένας μαθητής να συμμετέχει στο πρόγραμμα α και Β : ένας μαθητής ν συμμετέχει στο πρόγραμμα β , με Α ,Β , και την συνάρτηση*

 *f (χ) = - ln ( -x) +2 .*

*α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξτε ότι είναι γνησίως αύξουσα .*

*β) Να δείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της σε οποιοδήποτε σημείο της ( ) σχηματίζει με τους άξονες συντεταγμένων τρίγωνο με σταθερό εμβαδόν , ίσο με 2 .*

*γ) Ορίζουμε ως πιθανότητα Ρ(Α) του Α , το 9/ 10 του εμβαδού του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων μιας κατανομής και την πιθανότητα Ρ(Β) του Β , την διάμεσο τιμή των τιμών g( ) ,g( κ) ,g( ) ,g(5) με 1 < κ < 5 της συνάρτησης g(x) = .*

*i) Βρείτε τις πιθανότητες Ρ(Α) , Ρ(Β) .*

*ιι) Με ποια πιθανότητα πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α , Β .*

*Λύση : a) Eίναι P(A -B) –P()= P(A)-P( Αφού κάθε μαθητής συμμετέχει σε ένα τουλάχιστον των προγραμμάτων α , β , τότε με P( A . Τότε )= 0 .*

*Τότε για κάθε χ είναι f με πεδίο ορισμού το ( και με (x) = - > 0 . Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο ( .*

*β) Είναι (x) = . Η εξίσωση της εφαπτομένης της είναι ψ - (( που τέμνει τους άξονες στα σημεία Κ( 0, . Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ είναι ίσο με (ΟΚΛ) = .*

*γ) (i) Είναι γνωστό ότι το εμβαδό του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων ισούται με 1 , άρα θα είναι P(A) = 9/10 . Για κάθε χ >0 είναι (x) = .Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο ( 0,+ Επειδή 1<κ< 5 το , προκύπτει ότι g( ) >g(κ) > g( ) > g( 5 ). Τότε P(B)= δ = =*

*ii) (1) Ζητάμε την πιθανότητα P[ (A–B) (\*) . Πρέπει να βρούμε την P(A . Επειδή καθένας των μαθητών συμμετέχει σε ένα τουλάχιστον των προγραμμάτων α , β θα είναι Α , με P(A*

*Τότε επειδή είναι 1=P (Ω)=P(Aέχουμε σύμφωνα της (\*) ότι P[(A –B) .*

***ΙΙ . ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ***

***ΘΕΜΑ 1***

*Έστω f μια παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση στο [0, α] με και ο μιγαδικός αριθμός z με Re(z) >0 και ο οποίος ικανοποιεί την σχέση*

 *, ν θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 3 .*

*Α) Να δείξτε ότι .*

*B) Αν επί πλέον ισχύει , να δείξτε ότι*

 *(α) υπάρχει ξ , τέτοιο ώστε Im(z) = f (ξ) .*

 *(β) .*

 *(γ) ο + i f(ξ) .*

 *(δ) η εικόνα του μιγαδικού σημείο του κυκλικού δίσκου με κέντρο Κ(0,1) και ακτίνας 1 .*

 *(ε) υπάρχουν , τέτοια ώστε να ισχύει > 0 και μετά ότι ξ >.*

***ΘΕΜΑ 2***

*Έστω f μα παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με σύνολο τιμών το ( 0, + , f(1)=1 και*

 *, x*

*. Να δείξτε ότι ορίζεται η και βρείτε τον τύπο της .*

*. Αν , x > 0 , τότε να υπολογίστε το ολοκλήρωμα Ι =.*

*. Να δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό ξ >0 , ώστε η εφαπτομένη (ε) της να διέρχεται,*

 *από το σημείο Α( 0 , - ξ) .*

*. Να υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της , την ευθεία (ε) και την ευθεία χ = e .*

***ΘΕΜΑ 3***

*Έστω οι μιγαδικοί z , w με w και τέτοιοι ώστε και η συνεχής συνάρτηση f με f(χ) =.*

***.*** *Na δείξτε ότι (α) .*

 *(β) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [ 0, +) .*

 *(γ) .*

 *(δ) η εξίσωση χ = για α είναι αδύνατη .*

 *(γ) ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ(w) με w =χ+iψ είναι*

 *μια έλλειψη με εξίσωση C : .*

***.*** *Δίνεται η παράσταση t = με -1 Re(z) .*

*(a) Να δείξτε ότι , όπου λ = Re(z) .*

*(β) Να βρείτε τον z , ώστε η t να γίνεται μέγιστη .*

***ΘΕΜΑ*** *4 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , w με Im(z) , w = , z = όπου a πραγματικός αριθμός και η συνάρτηση f με f(x) = , x .*

 *Να αποδείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Α( w) είναι κύκλος , κέντρου Κ( 0,1) και ακτίνας 1.*

***.*** *Απoδείξτε ότι .*

***.*** *Αν είναι δυο μιγαδικοί που οι εικόνες τους ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του σημείου B(z) και ρ = . Τότε να δείξτε ότι ισχύει ι) ρ = ιι) 0*

*(iii) .*

 *Να μελετήστε την f ως προς την μονοτονία της .*